In the Name of God

DYNAMICS

[Course No. 8102128]

Dr. Mehdi Ghassemieh

m.ghassemieh@ut.ac.ir

Tel. 6111-2273

Fax. 6640-3808

بنام خدا

دینامیک (نیمسال ۲-۹۷-۹۶)

شماره درس ۸۱۰۲۱۲۸

دکتر مهدی قاسمیه

دانشکده مهندسی عمران

فصل هفتم :

PLANE MOTION OF RIGID BODIES

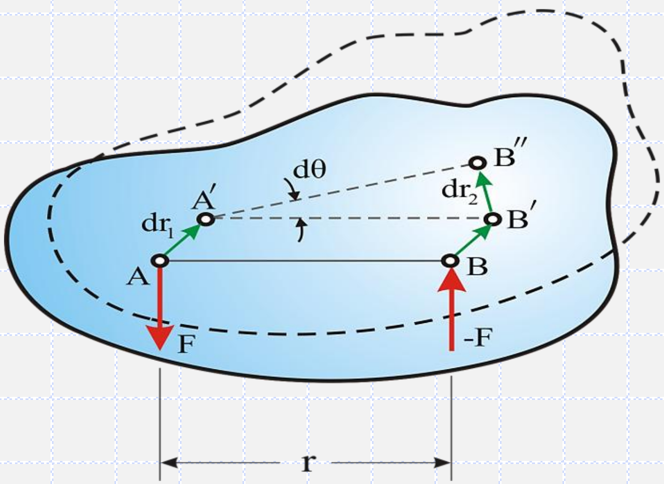
Momentum and Energy Methods

حرکت صفحه ای اجسام صلب : روشهای انرژی و ممنتوم

در این فصل روشهای انرژی و و اندازه حرکت خطی را برای تحلیل حرکت صفحه ای اجسام صلب به کار می بریم.

اصل کار و انرژی

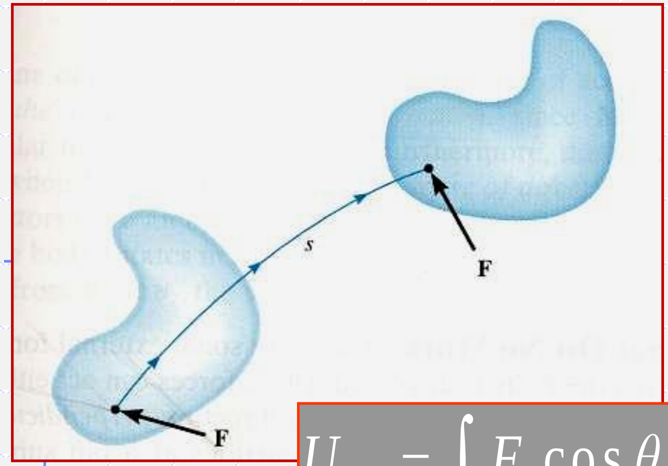
روش کار و انرژی برای حل مسئله های مربوط به سرعت ها و جابجایی بـه خوبی قابل استفاده است.



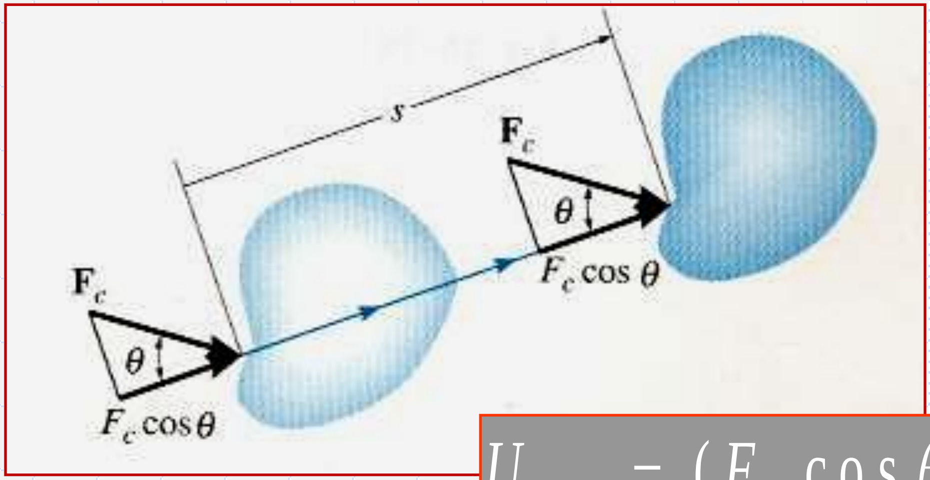
$$\boxed{T_1 + U_{1\to 2} = T_2}$$

علاوه بر نیرو، لنگر هم می‌توانیم داشته باشیم.

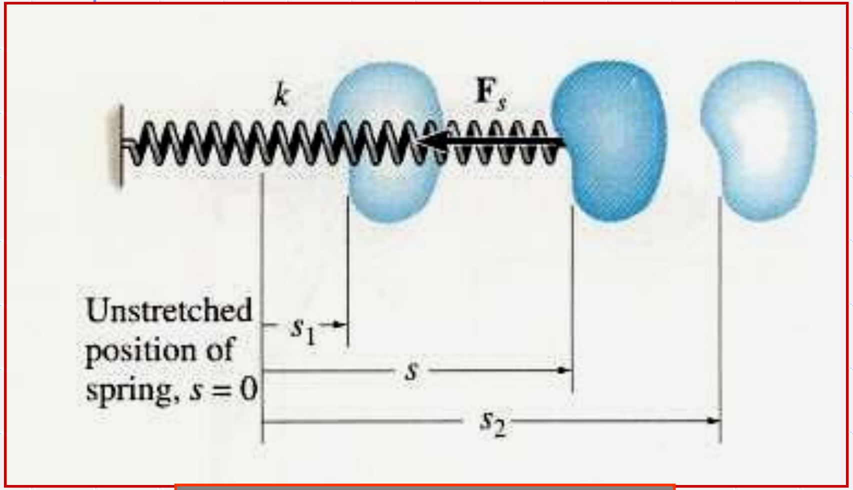
$$\boxed{\begin{array}{ll} U_{1\to 2} = \int M \, . \, d\theta & : \quad M \\ U_{1\to 2} = \int F \, . \, dr & : \quad F \end{array}}$$



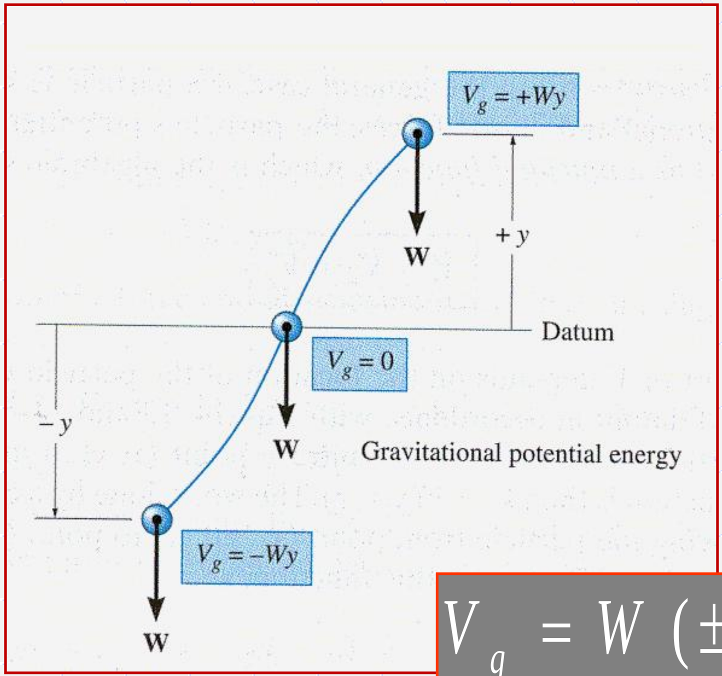
$$U_F = \int_s F \cos\theta \, ds$$



$$U_{F_c} = (F_c \cos\theta) s$$

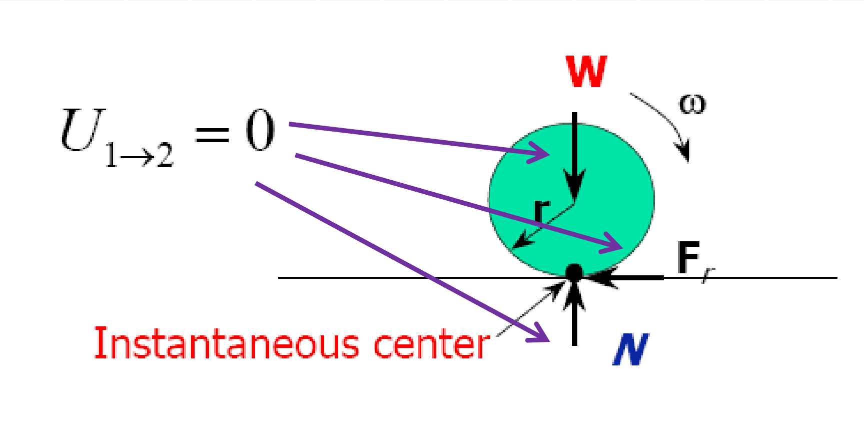


$$U_s = \frac{1}{2} k s_1^2 - \frac{1}{2} k s_2^2$$

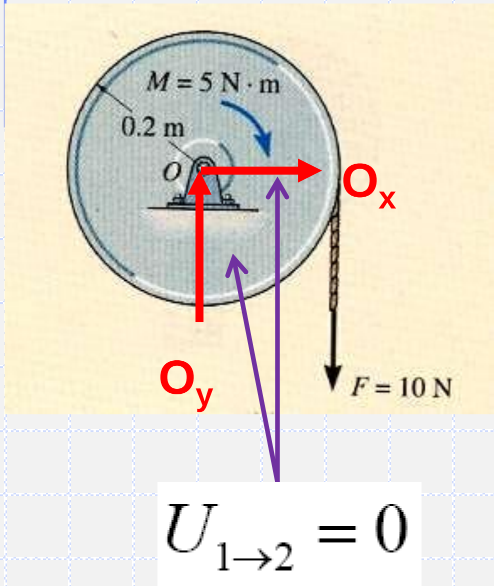


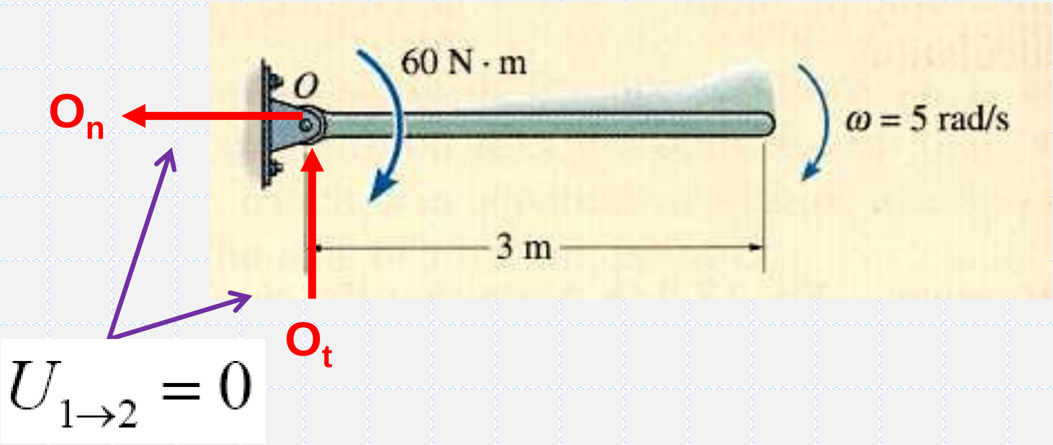
$$V_g = W(\pm \Delta y)$$

نیروهائی که کار انجام نمی دهند:

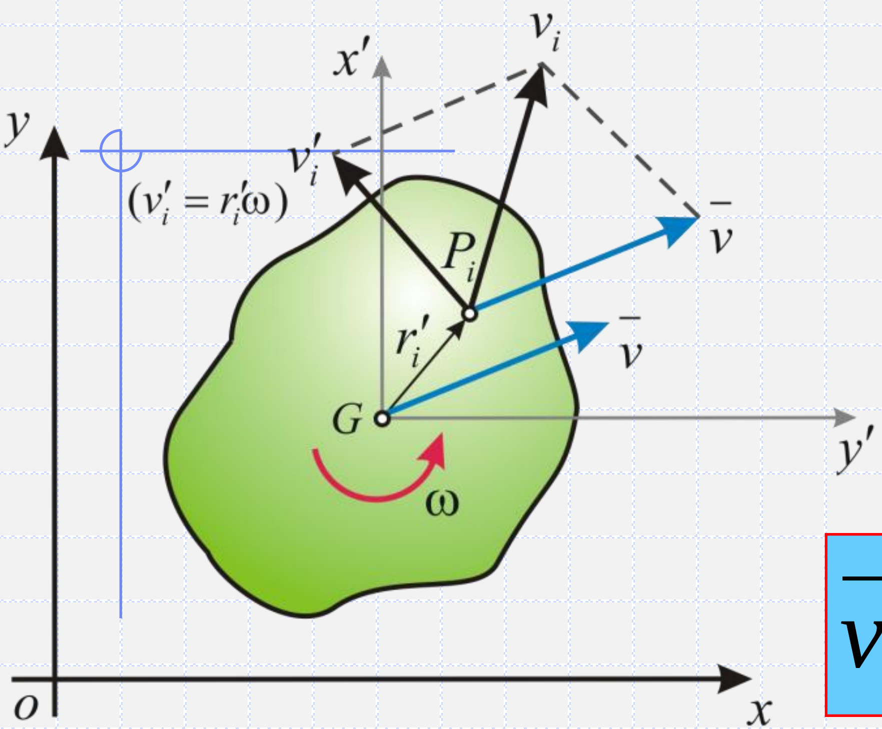


حرکت غلتشی:





انرژی جنبشی جسم صلب در حرکت صفحه‌ای



p_i یک ذره از جسم صفحه ای اســت،
برای سرعت این نقطه خواهیم داشت

$\vec{\bar{v}}$ = سرعت مرکز جرم

$\vec{v}_i$ = سرعت مطلق ذره

$\vec{v}_i'$ = سرعت نسبی ذره

$$\boxed{\vec{v}_i = \vec{v}_i' + \vec{\bar{v}}}$$

$$T = \frac{1}{2}\sum \Delta m_i v_i^{\,2} = \frac{1}{2}\sum \Delta m_i (\vec{v}_i' + \vec{\bar{v}}).(\vec{v}_i' + \vec{\bar{v}})$$

$$= \frac{1}{2}\sum \Delta m_i \vec{v}_i'^{\,2} + \frac{1}{2}(\sum \Delta m_i)\vec{\bar{v}}^{\,2} + (\sum \Delta m_i.\vec{v}_i').\vec{\bar{v}}$$

$$T=\frac{1}{2}\sum \Delta m_i \vec{V}_i{}'^2+\frac{1}{2}\left(\sum \Delta m_i\right)\overline{\vec{V}}^2+\left(\sum \Delta m_i . \vec{V}_i{}'\right).\overline{\vec{V}}$$

$\sum \Delta m_i = m \rightarrow$ (کل جرم جسم صلب)

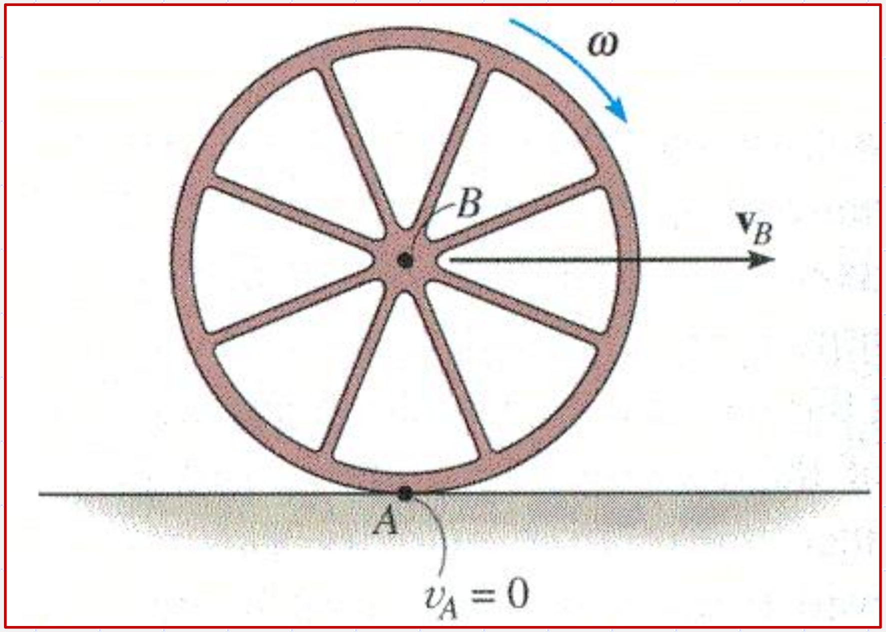
$(V_i' = r_i' \omega)$

$(\sum \Delta m_i \vec{V}_i') = 0$

$$T=\frac{1}{2}\sum \Delta m_i V_i'^2+\frac{1}{2}m\overline{V}^2=\frac{1}{2}\left(\sum \Delta m_i r_i'^2\right)\omega^2+\frac{1}{2}m\overline{V}^2$$

$$T=\frac{1}{2}\overline{I}\,\omega^2+\frac{1}{2}m\overline{V}^2$$

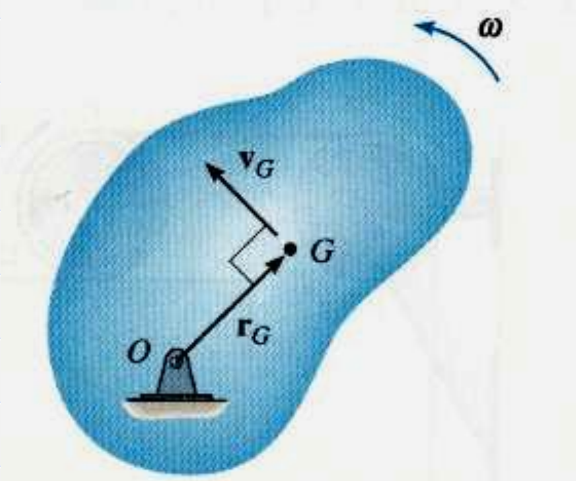
(حرکت دورانی) (حرکت انتقالی)



$$T = \frac{1}{2} m v_B^{\,2} + \frac{1}{2} I_B \omega^2$$

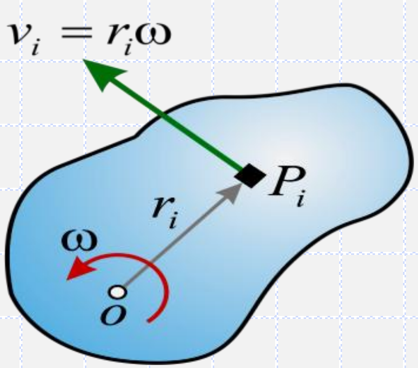
حرکت دورانی حول نقطه‌ای غیر از مرکز جرم

فرض کنیم که نقطه O تکیه گاه باشد و جسم مقید است که حول O دوران کند. می توانیم انرژی جنبشی جسم را به صورت مستقیم محاسبه کنیم.
برای این منظور می نویسیم :



Rotation About a Fixed Axis

$$
\begin{aligned}
T &= \tfrac{1}{2} m\bar{v}^2 + \tfrac{1}{2}\sum \Delta m_i v_i'^2 \\
&= \tfrac{1}{2} m\bar{v}^2 + \tfrac{1}{2}\left(\sum r_i'^2 \Delta m_i\right)\omega^2 \\
&= \tfrac{1}{2} m\bar{v}^2 + \tfrac{1}{2}\bar{I}\omega^2
\end{aligned}
$$



$$
\begin{aligned}
T &= \tfrac{1}{2} m\bar{v}^2 + \tfrac{1}{2}\bar{I}\omega^2 \\
&= \tfrac{1}{2} m(\bar{r}\omega)^2 + \tfrac{1}{2}\bar{I}\omega^2 \\
&= \tfrac{1}{2}\left(m\bar{r}^2 + \bar{I}\right)\omega^2 = \tfrac{1}{2} I_O\omega^2
\end{aligned}
$$

اصل حفظ انرژی :

وقتی یک جسم صلب یا سیستمی از اجسام صلب تحت اثر نیروهای پایستار حرکت کند، اصل کار و انرژی را می توان برای حل مسئله استفاده نمود:

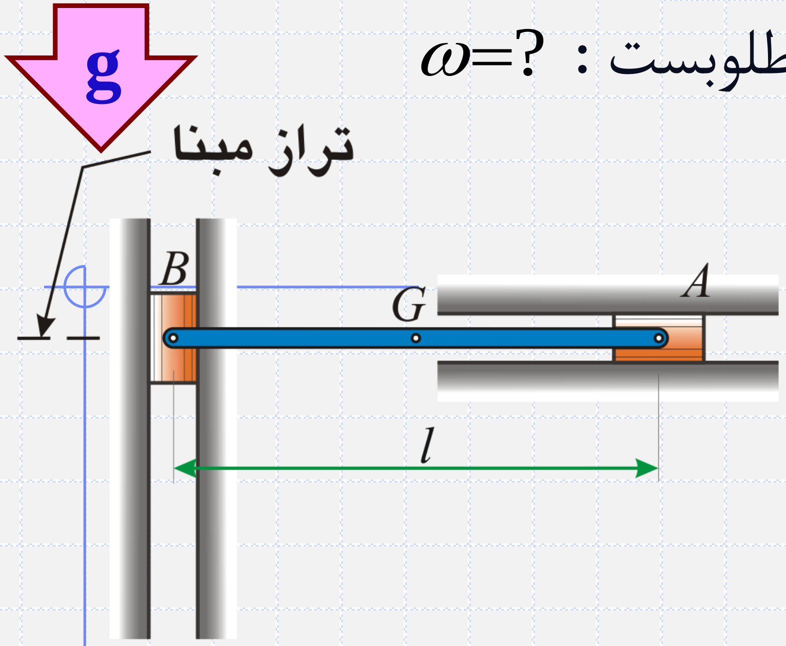
$$\boxed{T_1 + V_1 = T_2 + V_2}$$

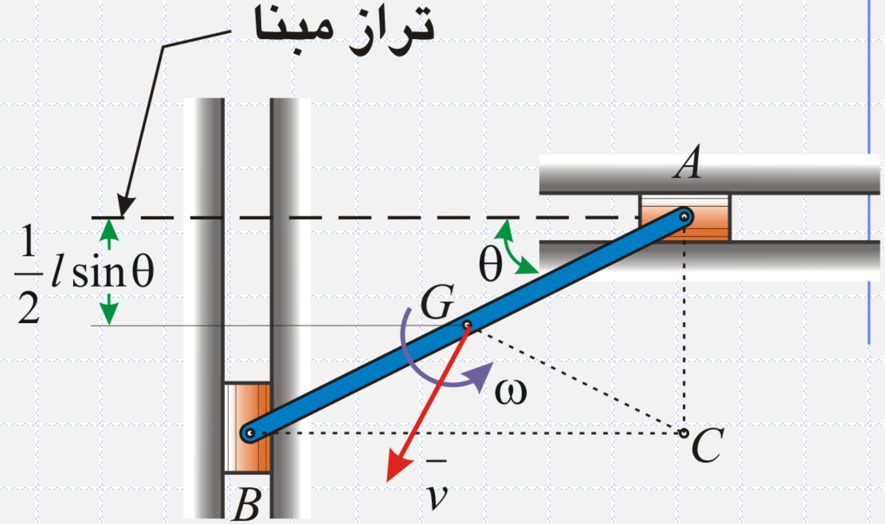
قدرت:

$$\boldsymbol{Power} = \frac{dU}{dt} = \frac{M\,d\theta}{dt} = M\omega \quad : \quad M$$

$$\boldsymbol{Power} = \frac{dU}{dt} = \vec{F}\cdot\vec{v} \quad : \quad F$$

مثال : برای جسم صلب ذیل در موقعیت θ مطلوبست : $\omega = ?$





حل :

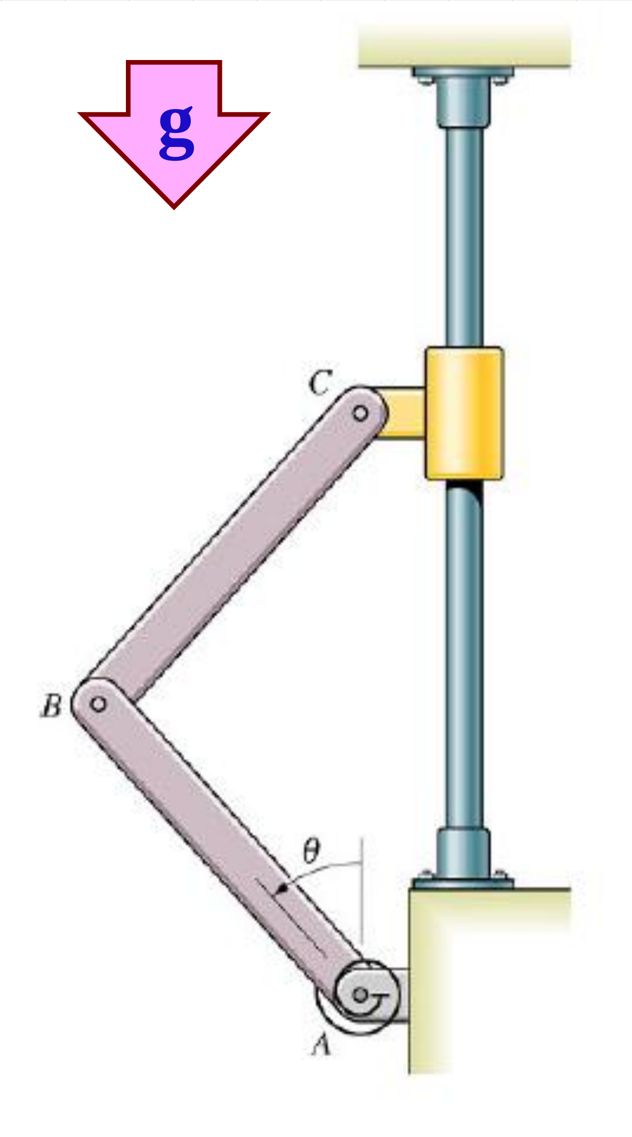
$$T_1 + V_1 = T_2 + V_2 \quad , \quad T_1 = 0 \, , \quad V_1 = 0$$

$$T_2 = \frac{1}{2} m \bar{V}^2 + \frac{1}{2} \bar{I} \omega^2 \quad , \quad \bar{V} = V_G = \frac{L}{2} \omega$$

$$T_2 = \frac{1}{2} m \left(\frac{L}{2} \omega\right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{12} m L^2\right) \omega^2 = \frac{1}{6} m L^2 \omega^2$$

$$V_2 = -mg \left(\frac{L}{2} Sin\theta\right) \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{\begin{gathered} 0 + 0 = \frac{1}{6} m L^2 \omega^2 - mg \left(\frac{L}{2} Sin\theta\right) \\ \omega = \sqrt{\frac{3g}{L} Sin\theta} \end{gathered}}$$



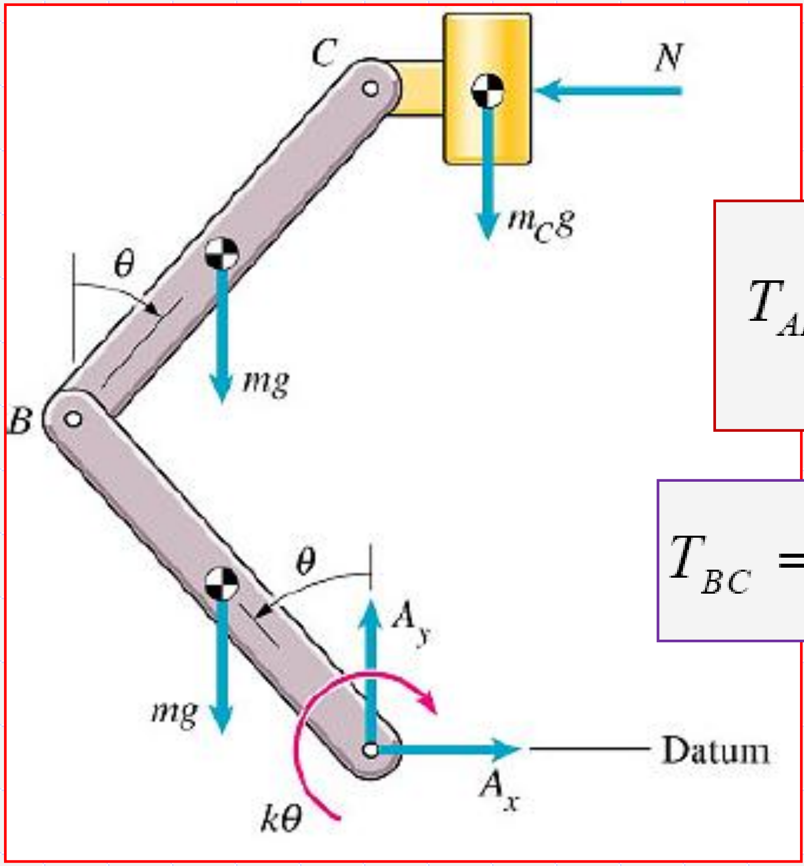
مثال : میله های AB و BC دارای جرمهای m و طولهای L میباشند. طوقه C هم دارای جرم m_c میباشد. یک فنر پیچشی در نقطه A لنگر دائمی به اندازه $K.\theta$ در نقطه A وارد مینماید. اگر این سیستم از حالت ساکن در وضعیت $\theta=0$ رها شود، مطلوبست : سرعت زاویه ای میله AB برحسب زاویه θ.

حل :

$$\boxed{T_1 + V_1 = T_2 + V_2}$$

برای میله ها :

$$\boxed{I_G = \frac{1}{12} m l^2}$$



$$T_{AB} = \frac{1}{2} I_A \omega^2 = \frac{1}{2}[I_G + (\frac{1}{2}l)^2 m]\omega^2 = \frac{1}{6} m l^2 \omega^2$$

$$T_{BC} = \frac{1}{2} m v_G^2 + \frac{1}{2} I \omega_{BC}^2 = \frac{1}{2} m v_G^2 + \frac{1}{24} m l^2 \omega_{BC}^2$$

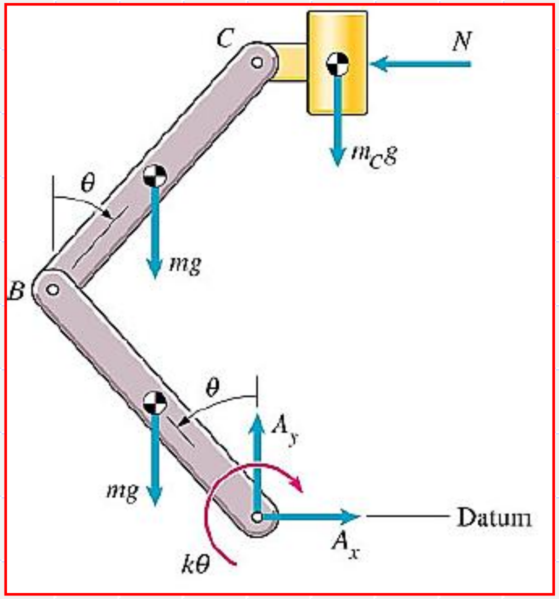
$$T_{collar} = \frac{1}{2} m_c v_c^2$$

$$V_{AB} + V_{BC} + V_{\text{collar}} = mg\left(\frac{1}{2} l \cos\theta\right) + mg\left(\frac{3}{2} l \cos\theta\right) + m_c g (2l\cos\theta)$$

$$V_{\text{spring}} = \frac{1}{2}k\theta^2$$

$$T_1 + V_1 = T_2 + V_2$$

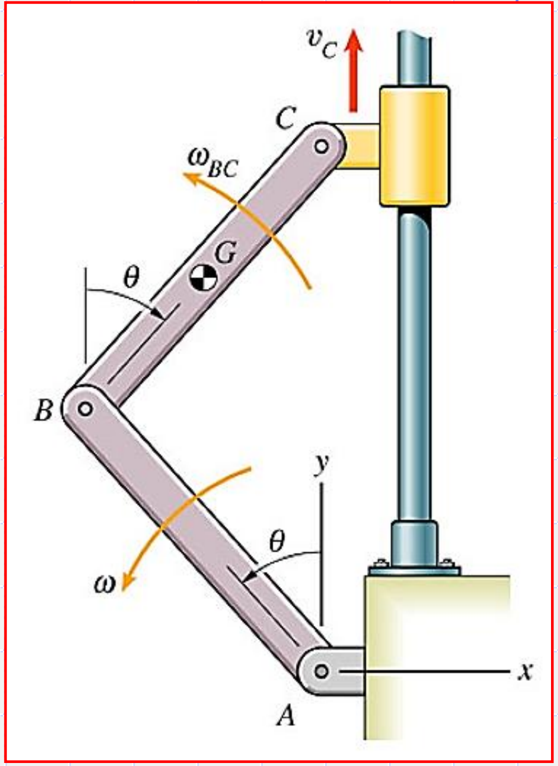
$$0 + 2mgl + 2m_c gl = \frac{1}{6}ml^2\boxed{\omega^2} + \frac{1}{2}m\boxed{v_G^2} + \frac{1}{24}ml^2\boxed{\omega_{BC}^2} + \frac{1}{2}m_c\boxed{v_c^2}$$
$$+ 2mgl\cos\theta + 2m_c gl\cos\theta + \frac{1}{2}k\theta^2$$



$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega}_{AB} \times \mathbf{r}_{B/A}$$

$$= 0 + \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ -l\sin\theta & l\cos\theta & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -l\omega\cos\theta\,\mathbf{i} - l\omega\sin\theta\,\mathbf{j}$$



$$v_c\mathbf{j} = \mathbf{v}_B + \boldsymbol{\omega}_{BC} \times \mathbf{r}_{C/B}$$

$$= -l\omega\cos\theta\,\mathbf{i} - l\omega\sin\theta\,\mathbf{j} + \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & \omega_{BC} \\ l\sin\theta & l\cos\theta & 0 \end{vmatrix}$$

$$\omega_{BC} = -\omega, \qquad v_c = -2l\omega\sin\theta$$

$$\mathbf{v}_G = \mathbf{v}_B + \omega_{BC} \times \mathbf{r}_{G/B}$$

$$= -l\omega\cos\theta\ \mathbf{i} - l\omega\sin\theta\ \mathbf{j} + \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & -\omega \\ \frac{1}{2}l\sin\theta & \frac{1}{2}l\cos\theta & 0 \end{vmatrix}$$

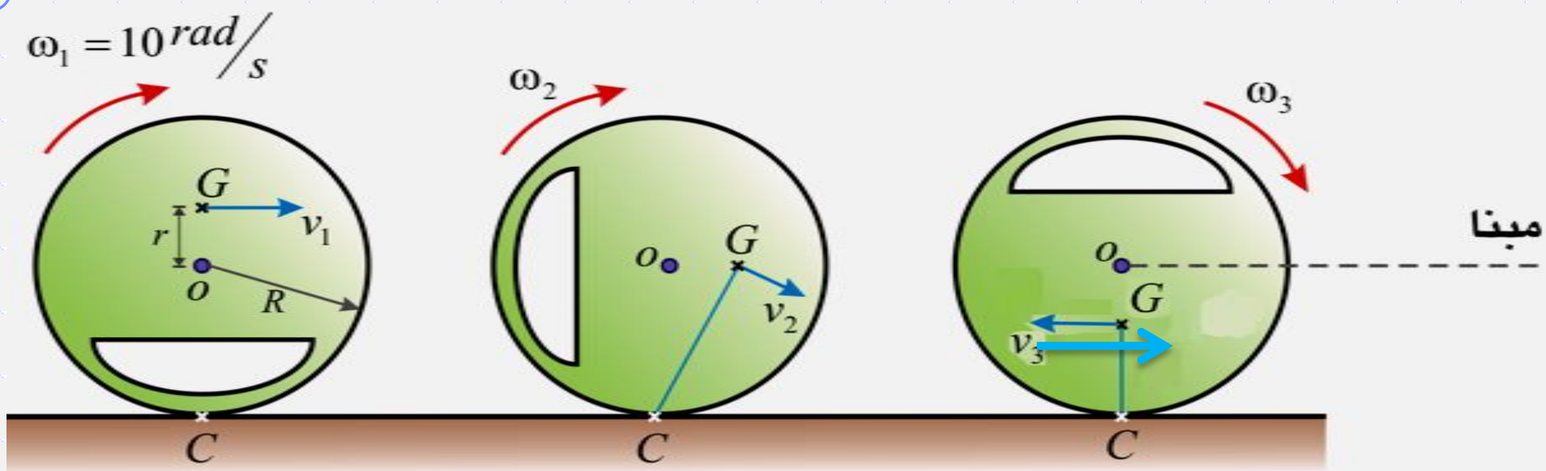
$$= -\frac{1}{2}l\omega\cos\theta\ \mathbf{i} - \frac{3}{2}l\omega\sin\theta\ \mathbf{j} \qquad v_G^2 = [\frac{1}{4}\cos^2\theta + \frac{9}{4}\sin^2\theta]l^2\omega^2$$

$$0 + 2mgl + 2m_c gl = \frac{1}{6}ml^2\boxed{\omega^2} + \frac{1}{2}m\boxed{v_G^2} + \frac{1}{24}ml^2\boxed{\omega_{BC}^2} + \frac{1}{2}m_c\boxed{v_c^2}$$
$$+ 2mgl\cos\theta + 2m_c gl\cos\theta + \frac{1}{2}k\theta^2$$

$$\omega = \left[\frac{2gl(m+m_c)(1-\cos\theta) - \frac{1}{2}k\theta^2}{\frac{1}{3}ml^2 + (m+2m_c)l^2\sin^2\theta}\right]^{1/2}$$

مثال : دیسک نامتعادلی که شعاع آن $150\ mm$ و شعاع ژیراسیون آن $75\ mm$ می باشد، با سرعت زاویه ای $\omega_1 = 10\ rad/s$ در حال دوران اســت. مطلوبســت:

سرعت زاویه ای ω_2 ، ω_3 $\qquad \bar{I} = m\bar{k}^2 \qquad \bar{k} = 75(mm)$



حل:

$$T_1 = \frac{1}{2} m\bar{v}_1^2 + \frac{1}{2}\bar{I}\omega_1^2 = 0.5(m)(\vec{v}_O + \vec{v}_{G/O})^2 + 0.5(m\bar{k}^2)\omega_1^2$$

$$= 0.5(m)(R\omega_1 \rightarrow + r\omega_1 \rightarrow)^2 + 0.5(m\bar{k}^2)\omega_1^2 = 0.5(m)\left[(R+r)^2 + \bar{k}^2\right]\omega_1^2$$

$$T_2 = \frac{1}{2} m\bar{v}_2^2 + \frac{1}{2}\bar{I}\omega_2^2 = 0.5(m)(\vec{v}_O + \vec{v}_{G/O})^2 + 0.5(m\bar{k}^2)\omega_2^2$$

$$= 0.5(m)(R\omega_2 \rightarrow + r\omega_2 \downarrow)^2 + 0.5(m\bar{k}^2)\omega_2^2 = 0.5(m)\left[R^2 + r^2 + \bar{k}^2\right]\omega_2^2$$

$$T_3 = \frac{1}{2} m\bar{v}_3^2 + \frac{1}{2}\bar{I}\,\omega_3^2 = 0.5(m)(\vec{v}_O + \vec{v}_{G/O})^2 + 0.5(m\bar{k}^2)\omega_3{}^2$$
$$= 0.5(m)(R\omega_3 \rightarrow + r\omega_3 \leftarrow)^2 + 0.5(m\bar{k}^2)\omega_3{}^2 = 0.5(m)\left[(R-r)^2 + \bar{k}^2\right]\omega_3{}^2$$

$$V_1 = mgr \quad , \quad V_2 = 0 \quad , \quad V_3 = -mgr$$

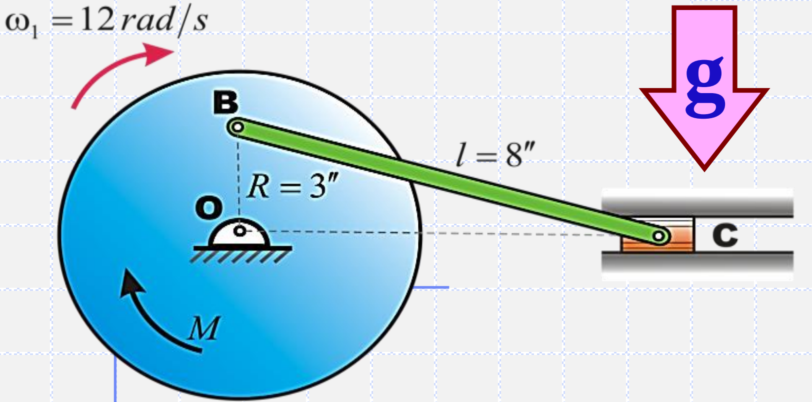
$$T_1 + V_1 = T_2 + V_2$$
$$\frac{1}{2} m(R+r)^2 \omega_1^2 + \frac{1}{2} m\bar{k}\,\omega_1^2 + mgr = \frac{1}{2} m(R^2 + r^2)\,\omega_2^2 + \frac{1}{2} m\bar{k}^2\,\omega_2^2$$

$$\omega_2 = 12.2 \ \frac{rad}{s}$$

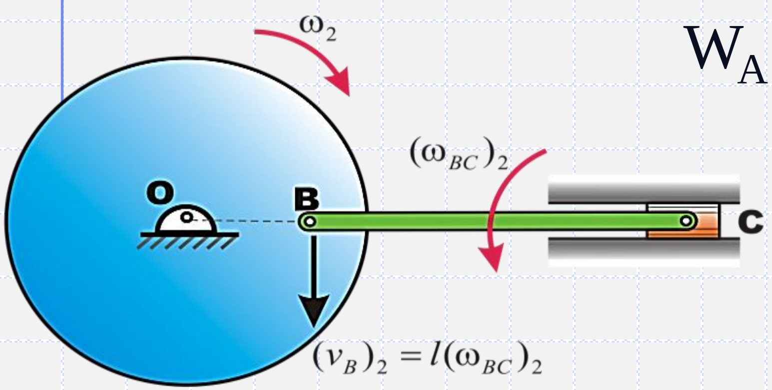
$$T_1 + V_1 = T_3 + V_3$$
$$\frac{1}{2} m(R+r)^2 \omega_1^2 + \frac{1}{2} m\bar{k}^2\,\omega_1^2 + mgr = \frac{1}{2} m(R-r)^2 \omega_3^2 + \frac{1}{2} m\bar{k}^2\,\omega_3^2 - mgr$$

$$\omega_3 = 17.09 \ \frac{rad}{s}$$

مثال : دیسک A به میله BC و قطعه C متصل است و با سرعت زاویه ای $12\ {rad}/{s}$ و گشتاور ثابت 5 (lb.in) در حال دوران است. مطلوبست: سرعت زاویه‌ای دیسک پس از 90 درجه دوران.



$$W_A = 4(\text{lb}) \;,\; W_{BC} = 1.25\ (\text{lb}) \;,\; W_C = 1.3\ (\text{lb})$$



حل:

$$T_1 + U_{1\to 2} = T_2 \quad , \quad T = T_A + T_{BC} + T_C \quad , \quad U_{1\to 2} = (U_{1\to 2})_g + (U_{1\to 2})_M$$

در حالت اولیه :

$$\vec{v}_C = \vec{v}_B + \vec{v}_{C/B} \qquad [v_C \rightarrow] = [v_B \rightarrow] + [l\omega_{BC} \nearrow]$$

$$\omega_{BC} = 0 \quad \Rightarrow \quad v_C = v_B = R\omega_1$$

$$\begin{cases} (T_A)_1 = \frac{1}{2}\bar{I}_A\omega_1^2 = \frac{1}{2}(\frac{1}{2}m_A R^2\omega^2) = \frac{1}{4}(\frac{4}{g})(\frac{3}{12})^2(12)^2 \\ (T_C)_1 = \frac{1}{2}m_C(V_C)_1^2 = \frac{1}{2}(\frac{1.5}{g})(R\omega_1)^2 \\ (T_{BC})_1 = \frac{1}{2}m_{BC}\bar{V}_1^2 + \frac{1}{2}\bar{I}_{BC}(\omega_{BC})_1^2 = \frac{1}{2}(\frac{1.25}{g})(R\omega_1)^2 + 0 \end{cases}$$

در حالت 90 درجه دوران :

$$\vec{v}_{2C} = \vec{v}_{2B} + \vec{v}_{C/B} \qquad [v_{2C} \rightarrow] = [R\omega_2 \downarrow] + [l(\omega_{BC})_2 \uparrow]$$

$$(\omega_{BC})_2 = \frac{3}{8}\omega_2 \quad , \quad v_{2C} = 0$$

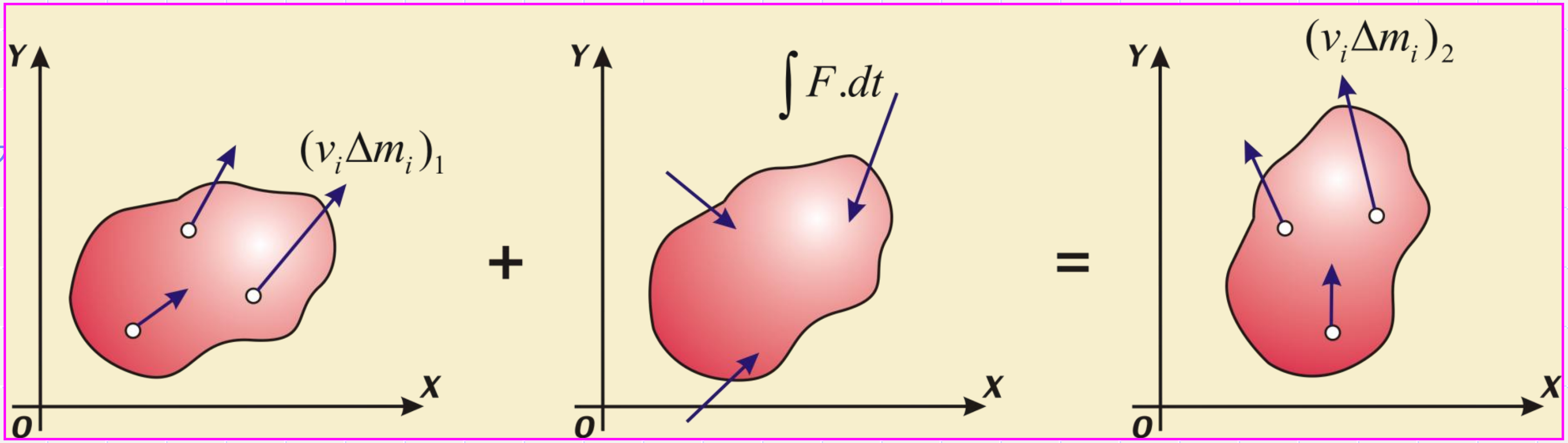
$$\begin{cases} (T_A)_2 = \frac{1}{2}\bar{I}_A\omega_2^2 = \frac{1}{4}(\frac{4}{g})(\frac{3}{12})^2\omega_2^2 \\ (T_C)_2 = \frac{1}{2}M_C(V_C)_2^2 = 0 \\ (T_{BC})_2 = \frac{1}{2}m_{BC}(\bar{V}_{BC})_2^2 + \frac{1}{2}\bar{I}_{BC}(\omega_{BC})_2^2 = \frac{1}{2}(\frac{1.25}{g})(\frac{R\omega_2}{l})^2 + \frac{1}{2}(\frac{1.25}{12g})(\frac{8}{12})^2(\frac{3}{8}\omega_2)^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (U_{1\to 2})_g = [(U_{1\to 2})_g]_A + [(U_{1\to 2})_g]_{BC} + [(U_{1\to 2})_g]_C \\ \qquad = [(U_{1\to 2})_g]_{BC} = W_{BC}\dfrac{R}{2} = 1.25 \times \dfrac{3}{2} = 1.875 \\ (U_{1\to 2})_M = \int_{\circ}^{\pi/2} M d\theta = M\theta = \dfrac{5}{12}\left(\dfrac{\pi}{2}\right) \end{cases}$$

$$\boxed{T_1 + U_{1\to 2} = T_2}$$

$$\boxed{\omega_2 = 25.1 \quad (rad/s)}$$

اصل ایمپالس و ممنتوم برای حرکت صفحه‌ای جسم صلب



با نوشتن اصل ایمپالس و ممنتوم برای جسم صلب معادله های زیر بدست می آید: دو معادله در راستای X و در راستای Y:

$$\boxed{\vec{L}_1 + \Sigma \vec{I}mp_{1\to 2} = \vec{L}_2 \quad \Leftrightarrow \quad m\vec{v}_1 + \sum \int \vec{F}_i dt = m\vec{v}_2}$$

یک معادله :

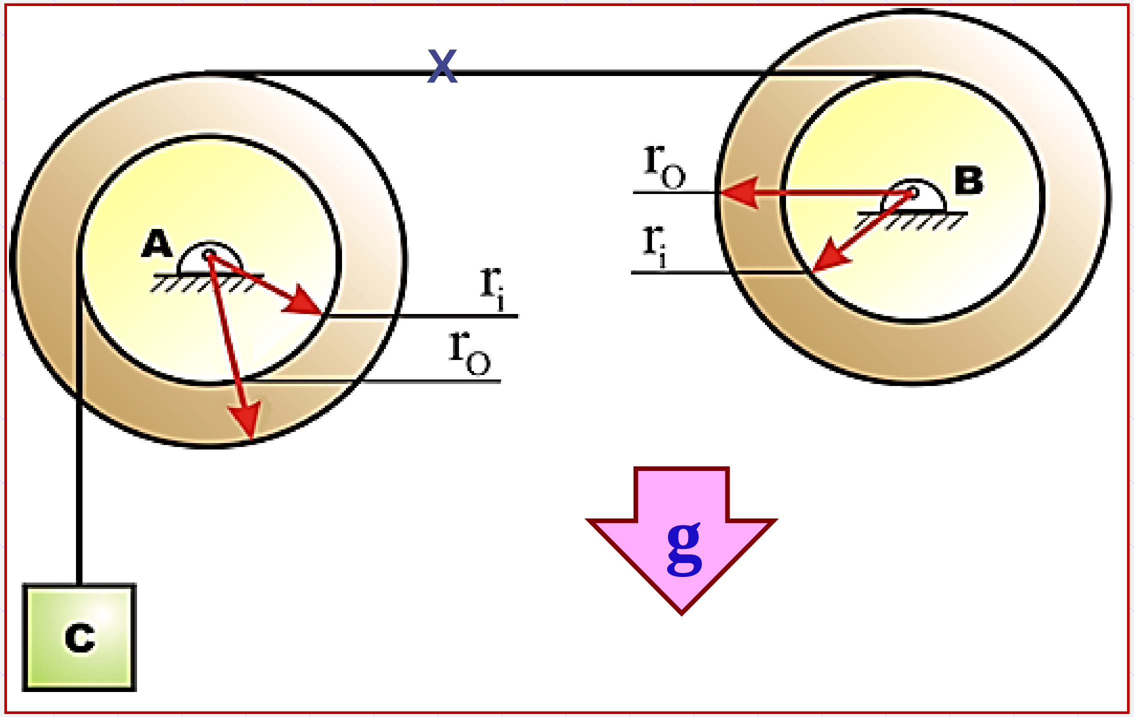
$$\boxed{(H_G)_1 + \Sigma Aimp_{1\to 2} = (H_G)_2 \quad \Leftrightarrow \quad \bar{I}\omega_1 + \sum \int M_i dt = \bar{I}\omega_2}$$

مثال : وزنه C به جرم 10 kg توسط ریسمانی به دور قرقره کوچک داخلی A متصل است. شعاع قرقره های داخلی 10 cm و شعاع قرقره های خارجی 15 cm است. مطلوبست، سرعت وزنه C پس از 3 ثانیه شروع حرکت از حالت ساکن.

$$\bar{I}_A = \bar{I}_B = 0.25\ (kg.m^2)$$

حل:

رابطه سینماتیک:



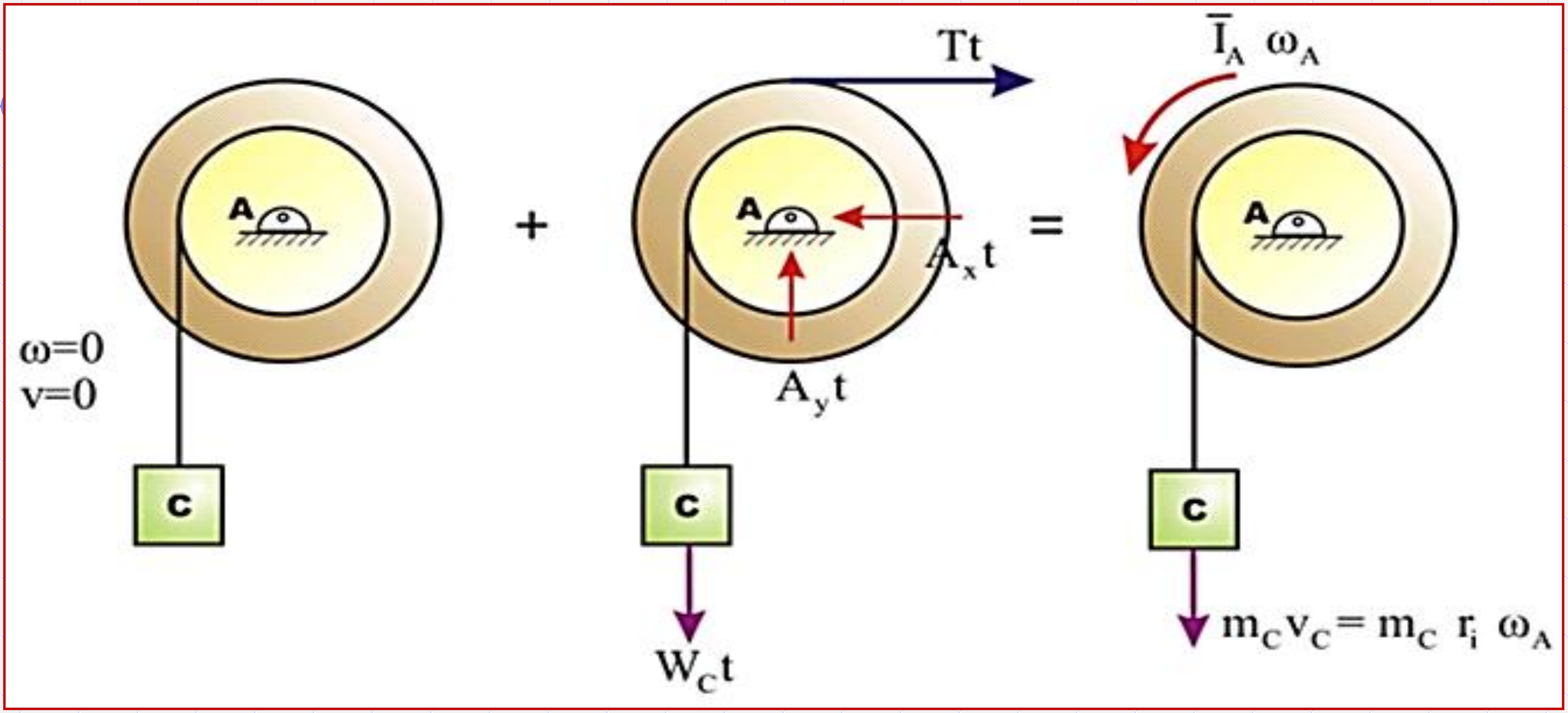
$$v_C = r_i\ \omega_A$$

$$r_o\ \omega_A = r_i\ \omega_B$$

$$\omega_A = \frac{v_c}{r_i}$$

$$\omega_B = \frac{r_o v_c}{r_i}$$

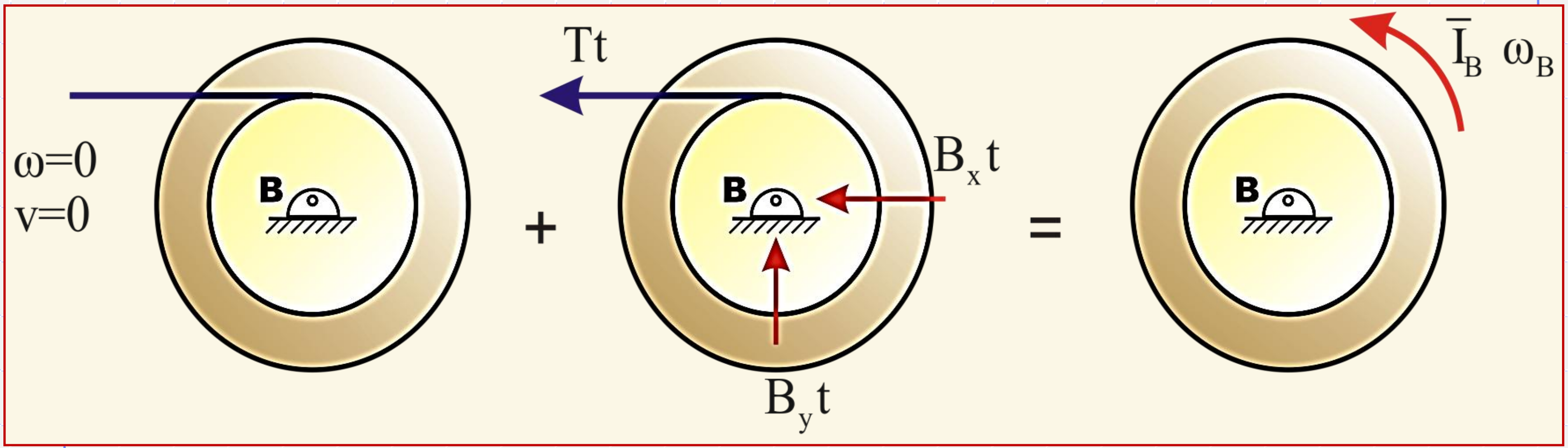
اصل ایمپالس و ممنتوم برای جرمهای A و C :



$$\sum M_A \qquad 0 + W_C t(r_i) - Tt(r_o) = m_C v_C r_i + \bar{I}\omega_A$$

$$10g(3)(0.1) - T(3)(0.15) = 10V_C(0.1) + 0.25\left(\frac{V_C}{0.1}\right)$$

اصل ایمپالس و ممنتوم برای قرقره B :



$$\sum M_B \qquad 0+Tt(r_i)=\bar{I}\omega_B \quad \Rightarrow \quad T(3)(0.1)=0.25\left(\frac{1.5V_C}{0.1}\right)$$

$$\boxed{v_c=3.23\ \ (m/s)\downarrow}$$

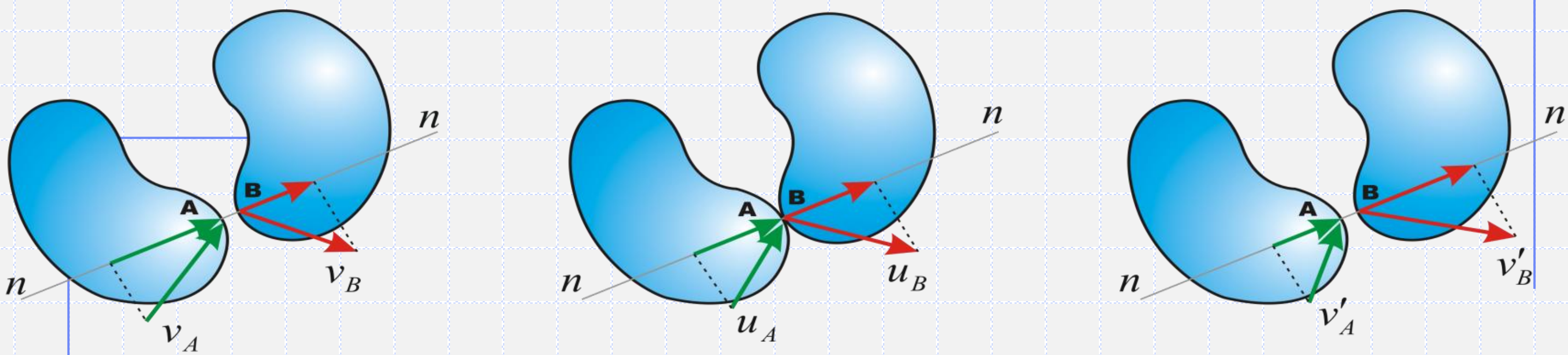
برخورد غیرمرکزی

قبلاً با مسئله های برخورد مرکزی یعنی مسائلی کـه در آن هـا مرکـز جـرم های دو جسم برخورد کننده روی خط برخورد واقع است آشنا شدیم. حـال می خواهیم برخورد غیر مرکزی (برخورد خارج از مرکز دو جسـم صـلب) را تحلیل کنیم.

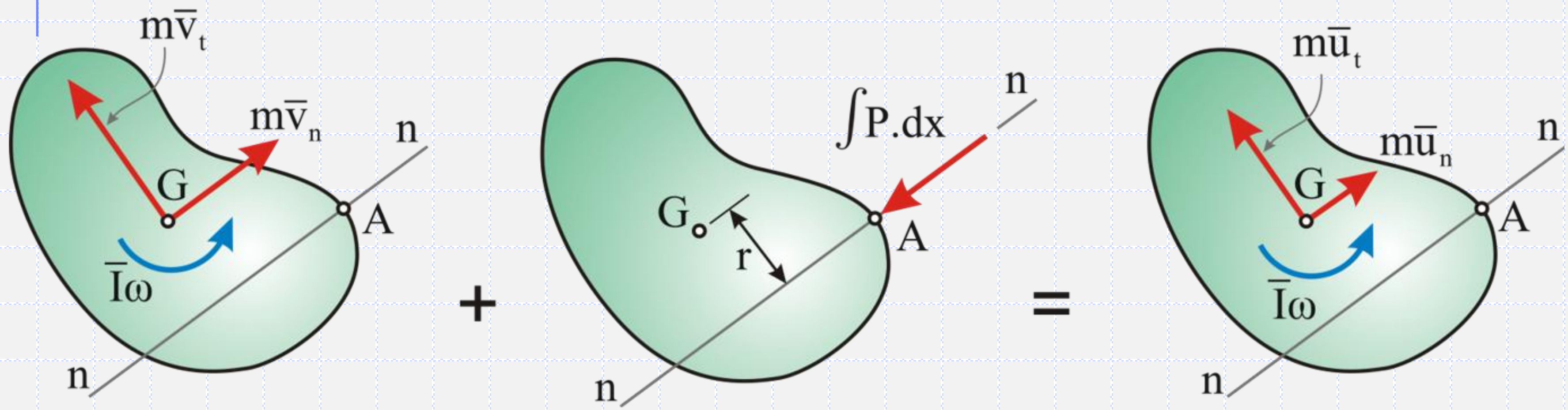
سرعت قبل از برخورد : $\bar{V}A , \omega_A , \bar{V}_B , \omega_B$

سرعت مرحله‌ی تغییر شکل : $\mathbf{u} \;,\; \boldsymbol{\omega}^*$

مرحله‌ی بازگشت (سرعت ها پس از برخورد) : $\bar{V}'_A , \omega'_A , \bar{V}'_B , \omega'_B$


n
A
B
v_A
v_B
n
A
B
u_A
u_B
n
A
B
v'_A
v'_B

(الف) (ب) (ج)


$m\bar{v}_t$
$m\bar{v}_n$
G
A
n
n
$\bar{I}\omega$
+
$\int P.dx$
n
G
r
A
n
=
$m\bar{u}_t$
$m\bar{u}_n$
G
A
n
n
$\bar{I}\omega$

۱) مرحله ی تغییر شکل برای جسم A

$$m_A(\bar{V}_A)_n - \int p\,dt = m_A u_n$$
$$\bar{I}_A \omega_A - r\int P\,dt = \bar{I}_A \omega^*$$

۲) مرحله بازگشت برای جسم A'

$$m_A u_n - \int R\,dt = m_A(\bar{V}'_A)_n$$
$$\bar{I}_A \omega^*_A - r\int R\,dt = \bar{I}_A \omega'_A$$

$$e = \frac{\int R\,dt}{\int P\,dt} = \frac{[(\bar{u}_n + r\omega^*)] - [(\bar{V}'_A)_n + r\omega'_A]}{[(\bar{V}_A)_n + r\omega_A] - [\bar{u}_n + r\omega^*]}$$

برای جسم B :

$$e = \frac{(u_b)_n - (V'_b)_n}{(V_b)_n - (u_b)_n}$$

رابطه سرعت های نسبی :

$$(V'_a)_n - (V'_b)_n = e[(V_b)_n - (V_a)_n]$$

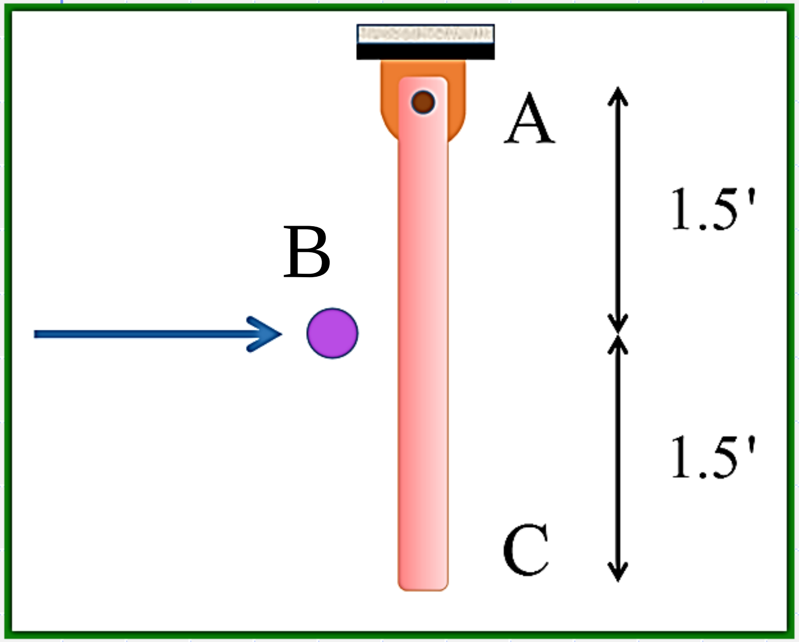
مثال: گلوله B به وزن $2\ (Ib)$ و با سرعت $30\ {}^{ft}/_{s}$ به میله AC به وزن $10\ (Ib)$ برخورد می کند. ضریب بازگشت بین کره B و میله AC 0.4 است.

مطلوبست: سرعت زاویه‌ای میله‌ی AC پس از برخورد.

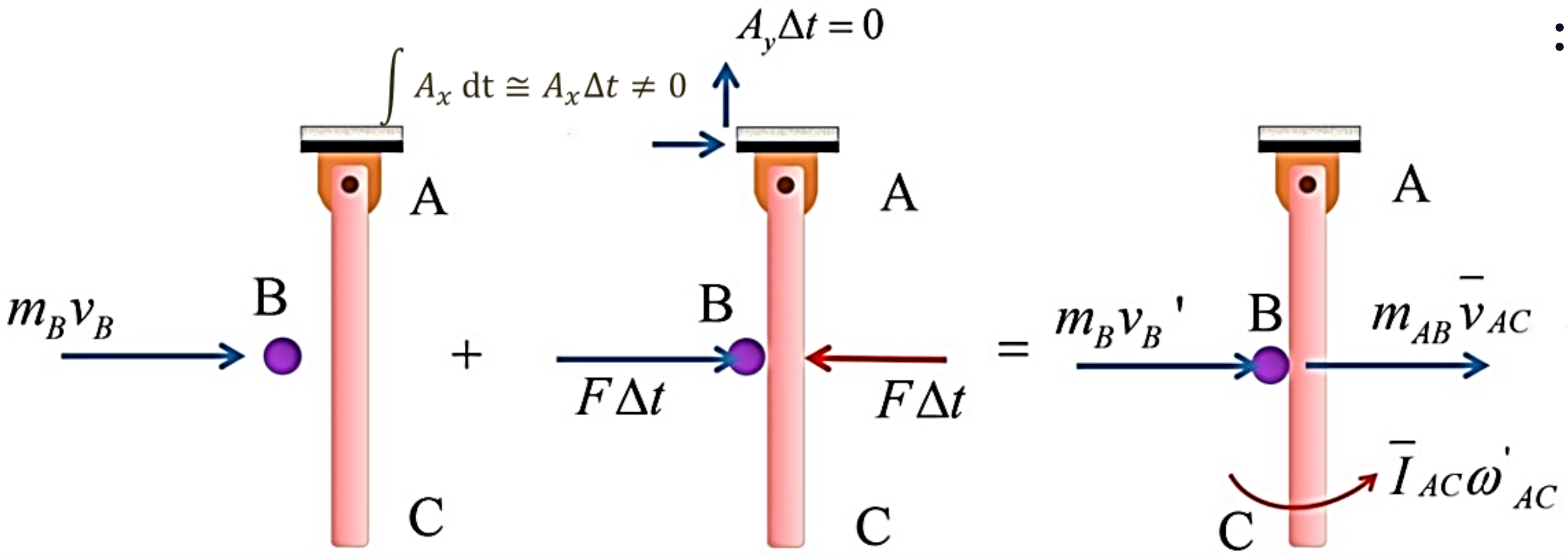
در ضمن اگر ضربه در $0.005\ (s)$ اتفاق بیافتد، مطلوبست، میانگین ایمپالس برخورد.

(از ایمپالس وزن در مسائل برخورد صرف نظر می‌شود.)

$$W_{AC}=10\ (lb) \quad , \quad e = 0.4 \quad , \quad W_B=2(Ib)$$



حل:



$$\boxed{\bar{V}'_{AC} = 1.5\, \omega'_{AC}}$$

$$(H_A) + 0 = (H'_A)$$

$$m_B V_B (1.5) + 0 = m_B V'_B (1.5) + m_{AC} (1.5\omega'_{AC})1.5 + \bar{I}_{AC}\, \omega'_{AC}$$

$$\frac{2}{32.2}(30)(1.5) = \frac{2}{32.2}(V'_B)(1.5) + \left[\frac{10}{32.2}(1.5)^2 + \frac{10\times 3^2}{12\times 32.2}\right]\omega'_{AC} \qquad (1)$$

رابطه سرعت های نسبی :

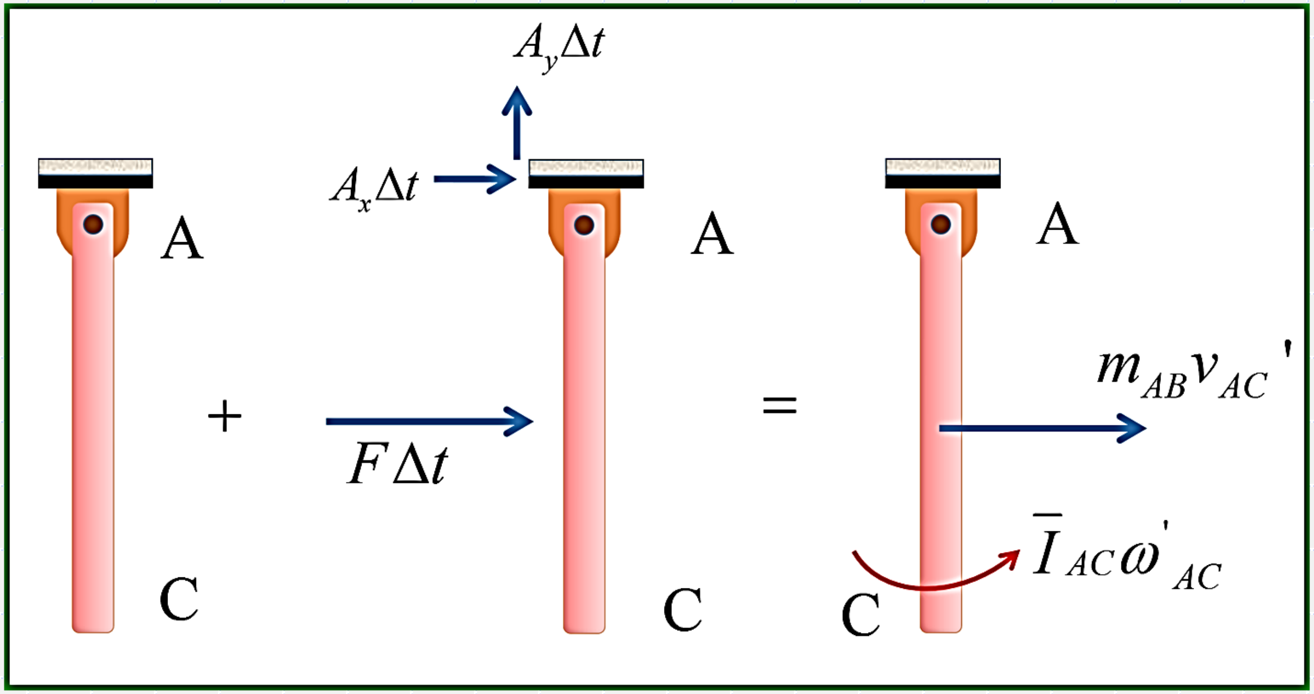
$$(V'_B)-(\overline{V}'_{AC})=0.4\left[0-V_B\right]$$
$$V'_B-1.5\omega'_{AC}=-0.4(30)$$

(2)

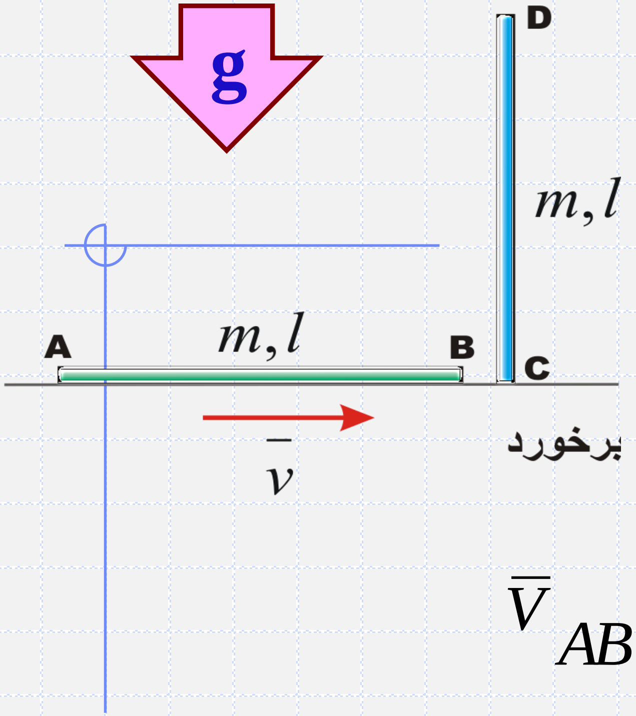
(1),(2)

$$\Rightarrow \quad V'_B=-6.52 \quad (ft/s) \leftarrow$$

$$\omega'_{AC}=3.65 \quad (rad/s)$$



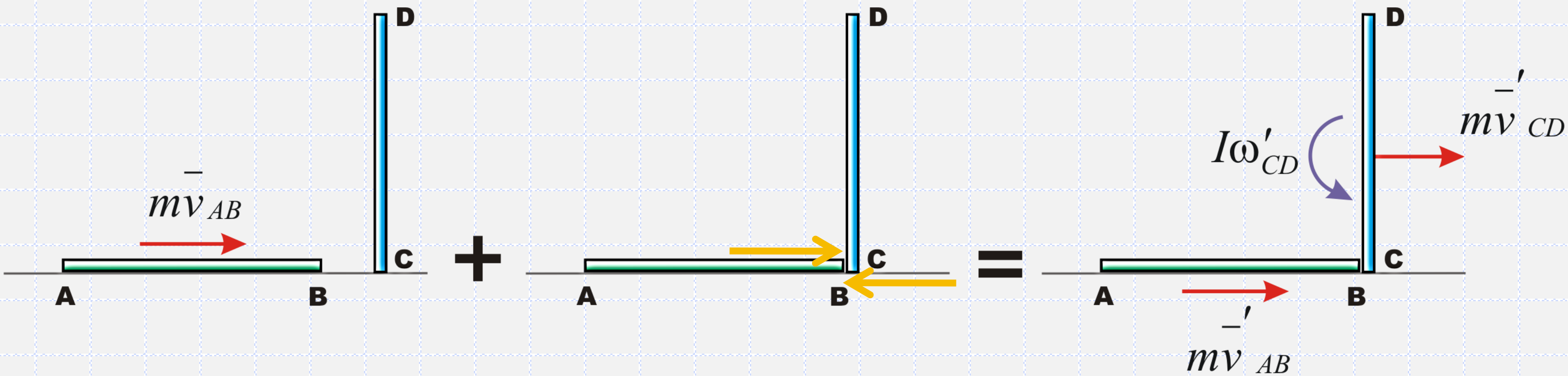
$$\sum M_A: \quad 0+F.t(1.5)=\overline{I}_{AC}\,\omega'_{AC}+m_{AC}\overline{V}'_{AC}(1.5)$$
$$F=453.42\ (lb)$$



مثال : میله باریک CD به طول L و جرم m را روی یک سطح بدون اصطکاک قرار داده اند. میله مشابه AB در امتداد سطح با سرعت V_1 در حال حرکت است که به میله CD برخورد می کند . با فرض اینکه برخورد کاملاً کشسان است، مطلوبست: سرعت میله های AB و CD پس از برخورد.

$$\bar{V}_{AB} = \bar{V} \qquad e = 1 \qquad \begin{matrix} m_{AB} = m_{CD} = m \\ L_{AB} = L_{CD} = L \end{matrix}$$

حل:



اصل ایمپالس و ممنتوم برای سیستم :

$$\xrightarrow{+} \quad m\overline{V} + 0 = m\overline{V}'_{AB} + m\overline{V}'_{CD} \quad \Rightarrow \quad \overline{V} = \overline{V}'_{AB} + \overline{V}'_{CD} \qquad (1)$$

رابطه سرعتهای نسبی :

$$(V'_B)_n - (V'_C)_n = e\left[(V_C)_n - (V_B)_n\right]$$

$$(V_B)_n = \overline{V} \quad , \quad (V_C)_n = 0 \quad , \quad (V'_B)_n = \overline{V}'_{AB}$$

$$(V'_B)_n - (V'_C)_n = \overline{V} \qquad (2)$$

رابطه سینماتیک :

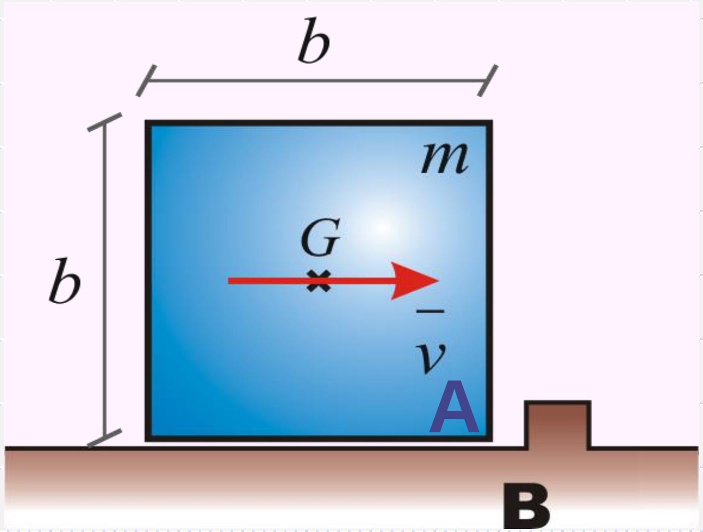
$$(V'_C)_n = \left[\overline{V}'_{CD}\right] + \left[\frac{L}{2}\omega'_{CD}\right] \qquad (3)$$

$$\sum M_C : \quad 0 + 0 = 0 + \overline{I}_{CD}\,\omega'_{CD} - \frac{L}{2}(m)\overline{V}'_{CD}$$

$$\frac{1}{12} mL^2 \omega'_{CD} = \frac{L}{2}(m)\overline{V}'_{CD} \qquad (4)$$

$$(1),(2),(3),(4) \Rightarrow \overline{V}'_{AB} = 0.6\overline{V} \rightarrow \, , \, \overline{V}'_{CD} = 0.4\overline{V} \rightarrow \, , \, \omega'_{CD} = 2.4\frac{\overline{V}}{L} \circlearrowleft$$

مثال: جسم A با جرم m روی سطح افقی بدون اصطکاکی با سرعت به مانع B برخورد می‌کند . مطلوبست: سرعت زاویه‌ای و سرعت مرکز جرم G پس از برخورد در دو حالت e=1 و e=0 .



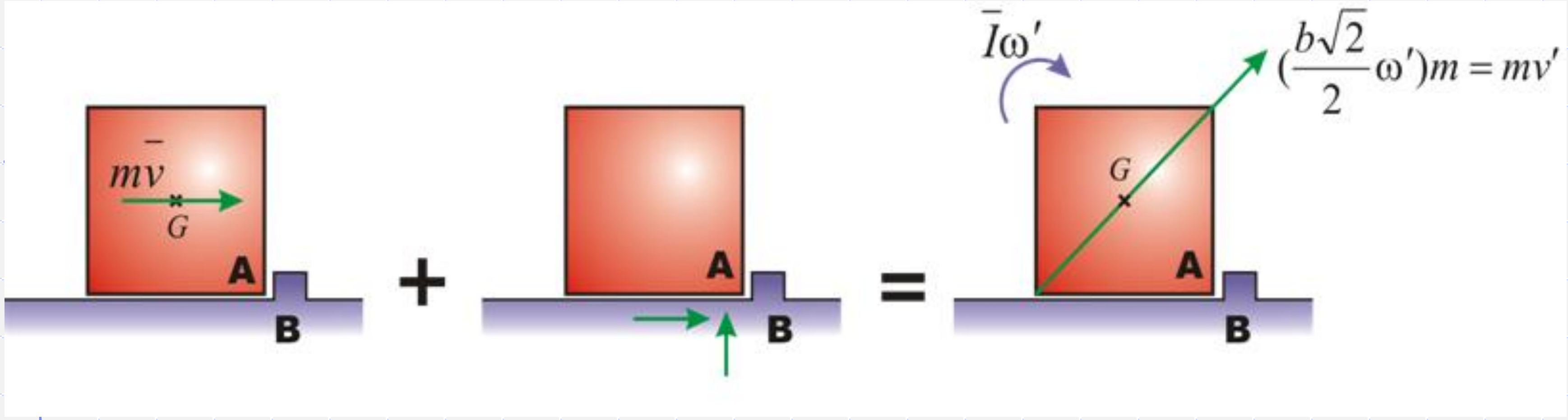
حل:

الف : e=0

نقطه A مرکز آنی دوران

$$\begin{cases} (V'_A)_t = (V_A)_t = 0 \\ (V'_A)_n - (V'_B)_n = e[(V_B) - (V_A)_n] \quad , \quad (V'_B)_n = 0 \;\Rightarrow\; (V'_A)_n = 0 \end{cases} \Rightarrow V'_A = 0$$

پس سرعت مرکز جرم عمود بر خط AG می باشد.



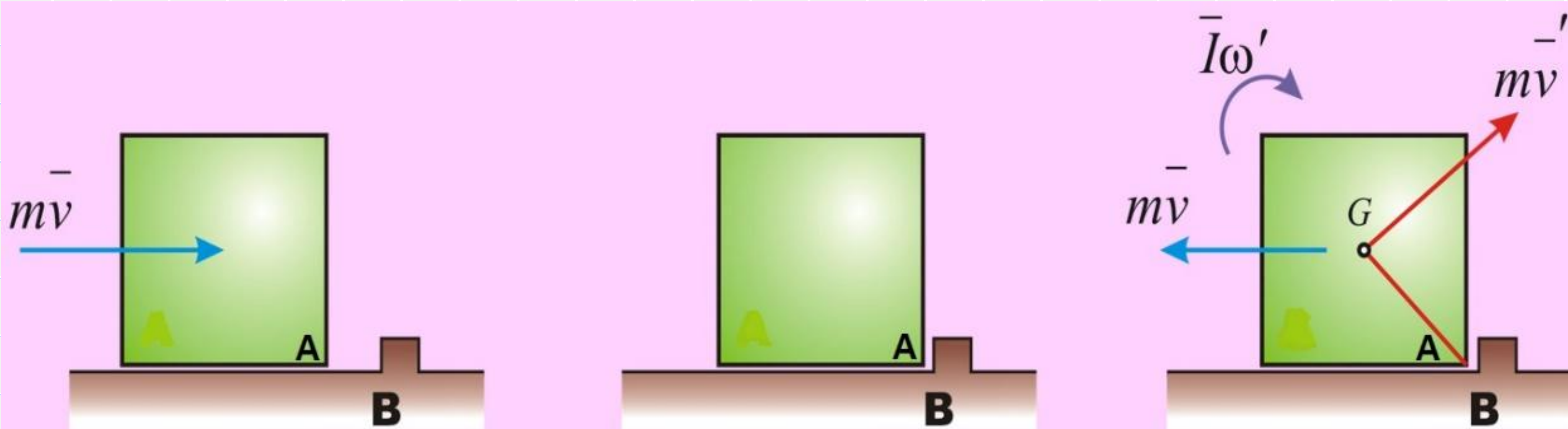
$$\sum M_A : \quad m\bar{V}(\frac{b}{2}) + 0 = \bar{I}\omega' + m\bar{V}'(\frac{b}{\sqrt{2}})$$

$$\bar{V}' = \frac{b\sqrt{2}}{2}\omega'$$

$$\omega' = \frac{3\bar{V}}{4b} \quad \Rightarrow \quad \bar{V}' = \frac{3\sqrt{2}}{8}\bar{V} \nearrow$$

ب : e=1

$$\begin{cases} (V'_A)_t = (V_A)_t = 0 \\ (V'_A)_n - (V'_B)_n = e[(V_B)_n - (V_A)_n] \Rightarrow (V'_A)_n = -\bar{V} = [\bar{V} \leftarrow] \end{cases} \Rightarrow V'_A = [\bar{V} \leftarrow]$$



$$\begin{cases} \overline{\overline{V}}' = \overline{V}'_A + \overline{V}'_{G/A} = \left[\overline{V} \leftarrow\right] + \left[(AG)\,\omega' \nearrow\right] \\ \sum M_A : \quad m\overline{V}\left(\frac{b}{2}\right) + 0 = \bar{I}\omega' + m(AG)^2\omega' - m\overline{V}\left(\frac{b}{2}\right) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad m\overline{V}(b) = \frac{1}{6}mb^2\omega' + m\left(\frac{b}{\sqrt{2}}\right)^2\omega' \quad \Rightarrow \quad \omega' = \frac{3}{2}\frac{\overline{V}}{b}$$

$$\Rightarrow \quad \overline{\overline{V}}' = \left[\overline{V} \leftarrow\right] + \left[\frac{b}{\sqrt{2}}\left(\frac{3}{2}\frac{\overline{V}}{b}\right) \nearrow\right] = \left[\overline{V} \leftarrow\right] + \left[\frac{3}{2\sqrt{2}}\overline{V} \nearrow\right] = \left[\overline{V} \leftarrow\right] + \left[\frac{3}{4}\overline{V} \rightarrow\right] + \left[\frac{3}{4}\overline{V} \uparrow\right]$$

$$\Rightarrow \quad \overline{\overline{V}}' = \left[\frac{1}{4}\overline{V} \leftarrow\right] + \left[\frac{3}{4}\overline{V} \uparrow\right] = \left[0.79\ \overline{V} \nearrow 71.6^\circ\right]$$